Enseignement Spécifique

Etude énergétique des systèmes mécaniques

Travail et énergie

Comprendre

1- Introduction

Dans son fameux cours Feynman's lectures on Physics, le prix Nobel de physique américain John Phillips Feynman (1918–1988) énonce la propriété suivante: la principale caractéristique de l'énergie est d'être conservée.
De fait, ce n'est qu'après la "découverte" de ce que l'on a appelé le principe de conservation de l'énergie qu'elle a acquis le statut de concept de la physique.

1-1- Premières idées

Le mathématicien et physicien suisse Jean Bernoulli (1667–1748), ami de Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646–1716), a introduit le mot dans une lettre en date du 26 janvier 1717, où il définit l'énergie comme le produit de la force appliquée à un corps par le déplacement infinitésimal sous l'effet de cette force.
Bernoulli introduit ce terme en toute connaissance de son étymologie grecque: chez Aristote, energeia désigne force en action, par opposition à dynamis force en puissance.

1-2- Idée de conservation

La définition de l'énergie (produit de deux grandeurs) donnée par Bernoulli est immédiatement suivie d'un théorème de conservation. Mais pour Bernoulli ce principe de conservation n'est pas le grand principe qui régit le monde: il est d'une application bien trop limitée.
L'idée dans l'air du temps, parmi les mécaniciens et les philosophes, était qu'il existe quelque chose (à découvrir) qui garde toujours la même valeur, en sorte que si une quantité de cette chose semble disparaître, c'est qu'elle s'est simplement transformée.
Citons pour nous en persuader la Critique de la raison pure (1781), d'Immanuel Kant (1724–1804) (Principe de la permanence de la substance): "La substance persiste dans tout le changement des phénomènes Et sa quantité n'augmente ni ne diminue dans la nature".

1-3- Quelle grandeur se conserve?

En 1690, Leibniz avait montré que ce qui est conservé n'est pas, comme le prétendait René Descartes (1596–1650), la quantité de mouvement totale (somme des produits

masse×vitesse) mais ce qu'il avait appelé "vis viva" (force vive), produit de la masse par le carré de la vitesse.
Comme souvent en Physique, où la dénomination joue un rôle essentiel, l'émergence du concept d'énergie a donné lieu à un débat sémantique au terme duquel les mots force et énergie, longtemps mêlés, ont reçu chacun une définition bien précise.

1-4- La révolution industrielle

Le point marquant de cette rectification des concepts n'est pas dû aux physiciens eux-mêmes. Le concept d'énergie est un enfant de la révolution industrielle, en ce sens que des ingénieurs et des médecins ont à un moment servi de relais en mettant l'accent sur la notion de conversion (différente de celle de conservation), qui était leur pain quotidien.
La loi de conservation de l'énergie et donc la "découverte" de l'énergie ont été rendues possibles par l'existence d'un nombre de plus en plus grand de conversions.

Citons par exemple:

- L'invention de la pile électrique par Alessandro Volta (1745–1827) en 1800.
- La conversion du mouvement en courant électrique par Michael Faraday (1791–1867) en 1831.
- L'invention de la photographie par Joseph Nicéphore Niepce (1765–1833) en 1816.

Sans oublier, bien sûr, la conversion de la chaleur en mouvement telle qu'elle s'effectue depuis quelques décennies déjà dans les machines à vapeur comme celle de James Watt (1736–1819) en 1769.

1-5- La machine de Helmholtz

C'est l'étude de la chaleur (thermodynamique) et de la façon dont elle produit du travail mécanique, à laquelle ont participé des anglais tels que James Prescott Joule (1818–188) ou William Thomson, Lord Kelvin (1824–1907), le français Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796–1832) et les allemands Julius Robert Von Mayer (1814–1878) et Hermann Ludwig Von Helmholtz (1821–1894), qui a abouti au mémoire de Helmholtz où il établit la loi de conservation.
Helmholtz est le premier à avoir montré que ces diverses formes interconverties sont en fait des parties d'une même quantité, l'énergie, dont il a démontré mathématiquement la constance au cours du temps.
Donnons pour conclure quelques indications sur l'évolution du concept d'énergie au XXème siècle. On sait qu'Einstein, en 1905, a démontré l'équivalence entre la masse (inertielle) et l'énergie, unifiant les deux notions de la Physique classique qui avaient à voir avec la notion philosophique de substance.

2- Travail d'une force

2-1 Transfert d'énergie par travail mécanique

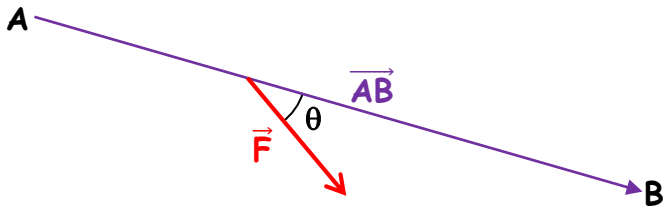
Un automobiliste exerçant sur sa voiture (en panne) une force $\vec{F}$ supposée constante au cours du temps donne de la vitesse au véhicule : la voiture acquiert donc de l'énergie (sous forme d'énergie cinétique) quand, simultanément, l'automobiliste en perd (sous forme d'énergie biochimique). Ce transfert d'énergie est le travail de la force $\vec{F}$.

2-2 Travail d'une force constante

On considère une force $\vec{F}$ constante dont le point d'application se déplace d'un point **A** à un point **B**. Le travail W_{AB} de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement s'exprime par le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})$$

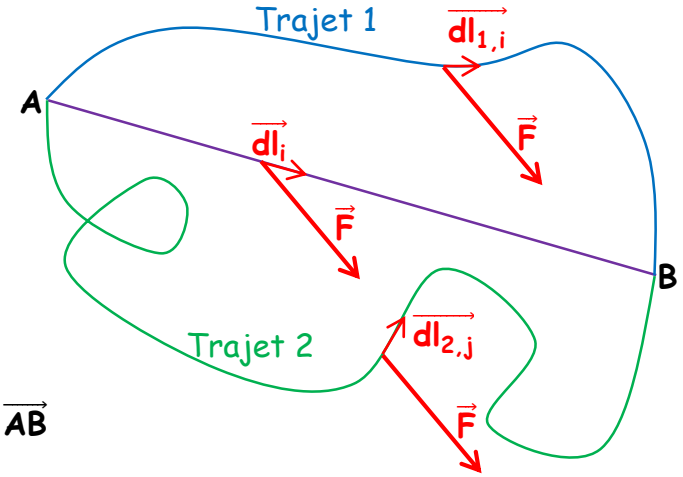
W_{AB}:	Travail de la force (J)
F:	Valeur de la force (N)
AB:	Longueur du déplacement (m)
$(\vec{F},\overrightarrow{AB})$:	Angle orienté (rad)



$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\theta)$$

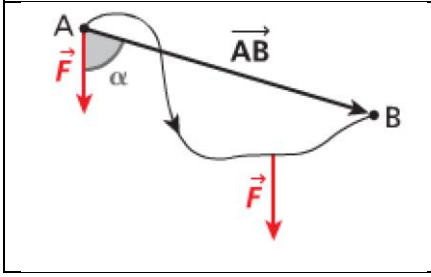
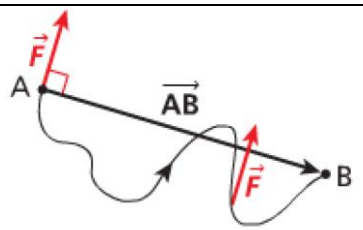
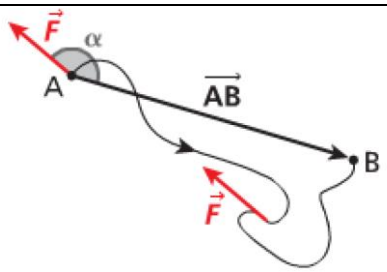
Le travail d'une force constante est indépendant du chemin suivi pour aller d'un point à un autre.

On le démontre en décomposant le trajet considéré en éléments vectoriels infinitésimaux:



$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \vec{F}.\overrightarrow{dl_{1,i}} = \sum_j \vec{F}.\overrightarrow{dl_{1,j}} = \sum_i \vec{F}.\overrightarrow{dl_i} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

Le travail est une grandeur algébrique (positive ou négative), c'est là tout l'intérêt de l'utilisation du produit scalaire.

$W_{AB}(\vec{F}) > 0$	$W_{AB}(\vec{F}) = 0$	$W_{AB}(\vec{F}) < 0$
$0 \leq (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) < \frac{\pi}{2}$	$(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) < \pi$
La force favorise le déplacement	La force n'a pas d'effet sur le déplacement	La force gêne le déplacement
Le travail est moteur	Le travail est nul	Le travail est résistant
Cas du poids lors d'une descente	Cas du poids lors d'un déplacement horizontal	Cas du poids lors d'une montée
		

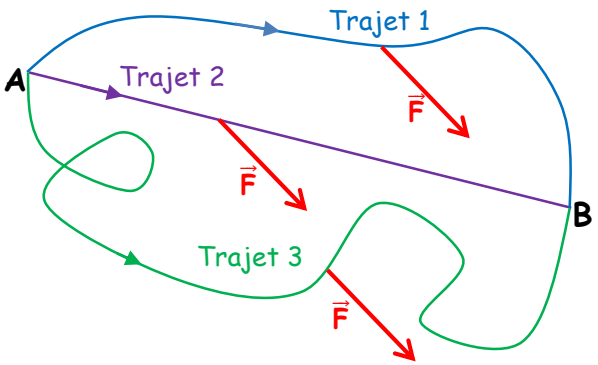
2-3- Forces conservatives et non conservatives

Une force est dite conservative si son travail entre deux points A et B quelconques ne dépend pas de la trajectoire.

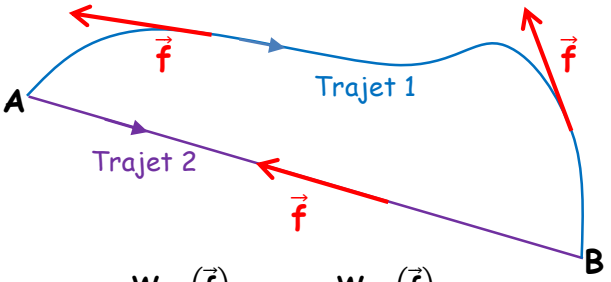
Toutes les forces constantes sont conservatives: le poids (dans un champ de pesanteur uniforme), la force électrique (dans un champ électrostatique uniforme), mais aussi d'autres forces non constantes (force de rappel élastique d'un ressort).

Les forces de frottements ou la force de tension d'un fil sont des forces non-conservatives.

Remarque: Dans le cas d'une trajectoire fermée le travail d'une force conservative est nulle.



$$W_{AB}(\vec{F})_{Trajet\ 1} = W_{AB}(\vec{F})_{Trajet\ 2} = W_{AB}(\vec{F})_{Trajet\ 3}$$

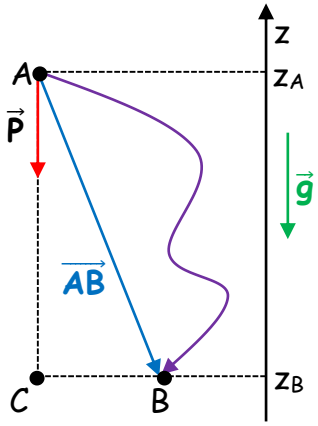


$$W_{AB}(\vec{f})_{Trajet\ 1} = W_{AB}(\vec{f})_{Trajet\ 2}$$

2-4- Le travail du poids dans un champ de pesanteur constant

Tant que le déplacement du système étudié est localisé et se fait à proximité de la surface de la Terre, le champ de pesanteur $\vec{g}$ est considéré comme constant. Le poids $\vec{P}=m.\vec{g}$ est donc une force constante.

Le travail du poids d'un solide de masse **m** dont le centre d'inertie **G** se déplace d'un point **A** à un point **B** a pour expression:



$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = m\,\vec{g}.\overrightarrow{AB}$$

Dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, associé au référentiel terrestre, on a:

$$\vec{g}\begin{cases}0\\0\\-g\end{cases} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{cases}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{cases}$$

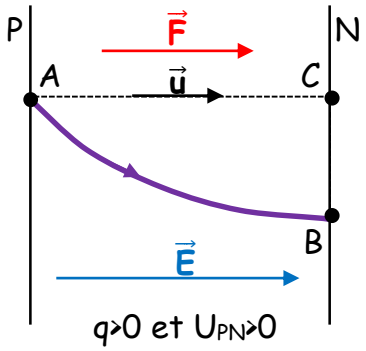
On aura ainsi pour le travail du poids:

$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = -\ m\ g\ (z_B-z_A) = m\ g\ (z_A-z_B) = m\ g\ h$$

Le travail du poids d'un objet de masse **m** ne dépend que de la hauteur **h** de chute.

2-5- Travail de la force électrique dans un champ constant

Entre deux plaques P et N d'un condensateur plan règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire aux plaques. Une particule de charge q en mouvement entre les deux plaques est soumise à la force électrique $\vec{F}=q.\vec{E}$.



Entre deux points A et B, la force électrique est constante, donc conservative et son travail sur le trajet AB ne dépend pas du chemin suivi. Il peut donc être calculé en passant par le point C:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \vec{F}.\overrightarrow{AC} + \vec{F}.\overrightarrow{CB}$$

Or $\vec{F}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont parallèles et $\vec{F}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont perpendiculaires donc: $\vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB$ et $\vec{F}.\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

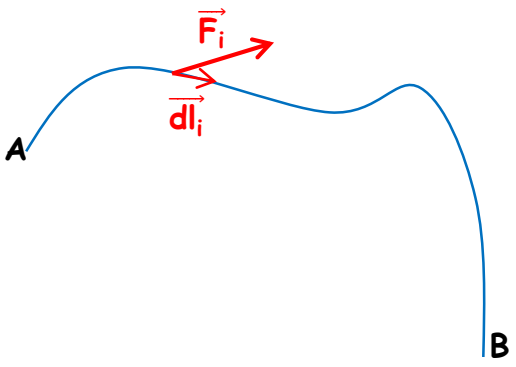
De plus, comme $U_{AC} = E.AC = E.PN = U_{PN}$, nous aurons ainsi:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AC} = q.E.AC = q.U_{PN}$$

2-6- Travail d'une force non constante

La plupart des forces ne sont pas constantes. C'est le cas par exemple de la force de gravitation qui s'exerce sur un satellite terrestre, de la tension du fil d'un pendule ou encore de la force de rappel d'un ressort.

On considère une force $\vec{F}$ dont la valeur, la direction ou le sens changent lorsque son point d'application se déplace entre les points **A** et **B**.



On appelle déplacement élémentaire $\vec{dl}$ un vecteur:

- Tangent à la trajectoire du point d'application.
- Infiniment petit.
- De même sens que le déplacement du point d'application.

Une force quelconque peut toujours être considérée comme constante sur un déplacement élémentaire.

Le travail élémentaire, noté δW, d'une force $\vec{F}$ durant un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ a pour expression:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dl}$$

Lorsqu'une force $\vec{F}$ s'exerce le long d'un déplacement $\overrightarrow{AB}$, on admet qu'il est toujours possible de décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en une infinité de déplacements élémentaires $\vec{dl_i}$ tels que:

$$\overrightarrow{AB} = \sum_i \vec{dl_i}$$

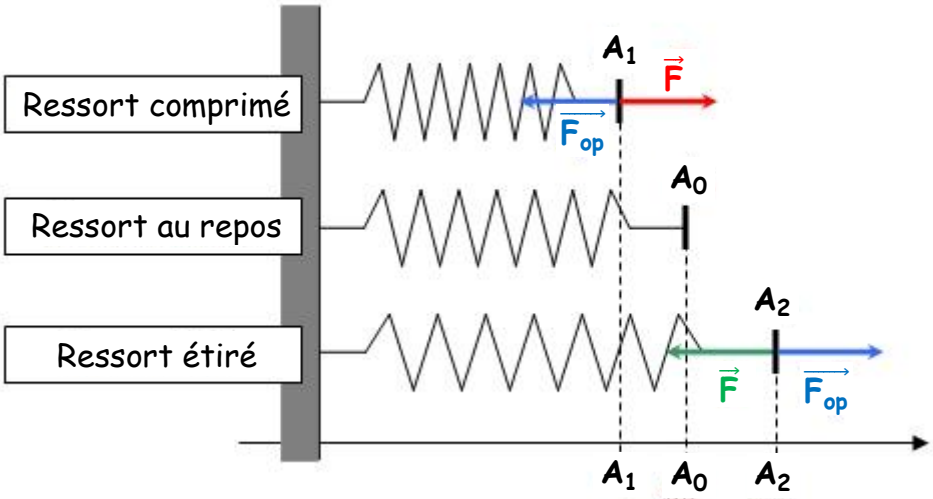
Le travail global W_{AB} de la force $\vec{F}$ est la somme de ses travaux élémentaires δW:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \delta W_i = \sum_i \vec{F_i}.\vec{dl_i}$$

2-7-Le travail de la force exercée par un opérateur sur un ressort

La force de contact $\vec{F_{op}}$, qui modélise l'action exercée par un opérateur sur l'extrémité libre d'un ressort pour le comprimer ou l'étire, est opposée à la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort.

On choisit un axe **(x'x)** parallèle à l'axe du ressort, d'origine **O** correspondant à la position de repos de l'extrémité libre du ressort et de vecteur unitaire $\vec{i}$.



Les forces de rappel et de contact s'écrivent alors:

$$\vec{F} = -k.x(t).\vec{i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{F_{op}} = k.x(t).\vec{i}$$

Ces forces sont toujours colinéaire au vecteur $\vec{i}$, mais sa valeur dépend de **x** et son sens change au cours du mouvement selon le signe de **x**.

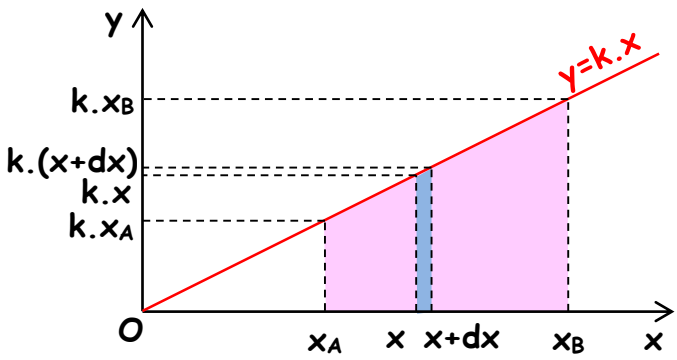
Son déplacement se décompose en déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl}$ colinéaires au vecteur $\vec{i}$, que l'on peut donc noter $\overrightarrow{dl} = dx.\vec{i}$.

Le travail global de la force $\overrightarrow{F_{op}}$ lors du déplacement de **A** à **B** est la somme infinie suivante:

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{op}}\right) = \sum \overrightarrow{F_{op}}.\overrightarrow{dl} = \sum k.x.\vec{i}.dx.\vec{i} = \sum k.x.dx.\vec{i}.\vec{i} = \sum k.x.dx$$

Or, la quantité **k.x.dx** représente l'aire du rectangle bleu sur la figure suivante.

Donc, la somme infinie $\sum k.x.dx$ est égale à l'aire $\mathcal{A}$ algébrique du trapèze rose.



On peut calculer l'aire $\mathcal{A}$ de ce trapèze de manière géométrique ou analytique.

Par la méthode géométrique on aura:

$$\mathcal{A} = \frac{(k.x_B - k.x_A).(x_B - x_A)}{2} = \frac{1}{2}.k.(x_B^2 - x_A^2)$$

Par la méthode analytique, $\mathcal{A}$ représentant l'aire comprise sous la courbe $y(x) = k.x$, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les abscisses x_A et x_B, nous sommes en présence de la notion d'intégrale:

$$A = \int_{x_A}^{x_B} k.x.dx = \left[\frac{1}{2}.k.x^2\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}.k.(x_B^2 - x_A^2)$$

Le travail de la force $\overrightarrow{F_{op}}$ appliquée par un opérateur à l'extrémité libre d'un ressort lors d'un déplacement de l'abscisse x_A à l'abscisse x_B de cette extrémité libre est donc:

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{op}}\right) = \frac{1}{2}.k.(x_B^2 - x_A^2)$$

3- Energie potentielle

3-1- Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$ d'un solide en interaction avec la Terre est une grandeur associée à sa position par rapport à la Terre.

Sa variation au cours d'un déplacement du centre d'inertie du solide de l'altitude z_A à l'altitude z_B est l'opposé du travail du poids lors du déplacement:

$$\Delta\mathcal{E}_{pp} = -W_{AB}(\vec{P}) = m.g.(z_B - z_A) = \mathcal{E}_{pp}(B) - \mathcal{E}_{pp}(A) = m.g.z_B - m.g.z_A$$

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide situé à l'altitude z a pour expression:

$$\mathcal{E}_{pp}(z) = m.g.z + K$$

La constante K est déterminée de façon que l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$ s'annule pour une altitude choisie comme référence.

Pour déplacer le solide par rapport à la Terre, un opérateur doit vaincre l'attraction terrestre; son action peut être représentée par une force $\overrightarrow{F_{op}} = -\vec{P}$.

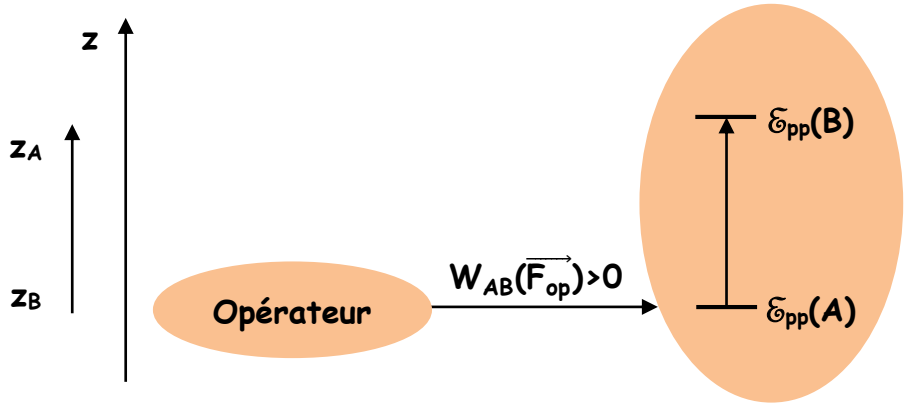
On aura donc:

$$\Delta\mathcal{E}_{pp} = \mathcal{E}_{pp}(B) - \mathcal{E}_{pp}(A) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}})$$

3-2- Cas général

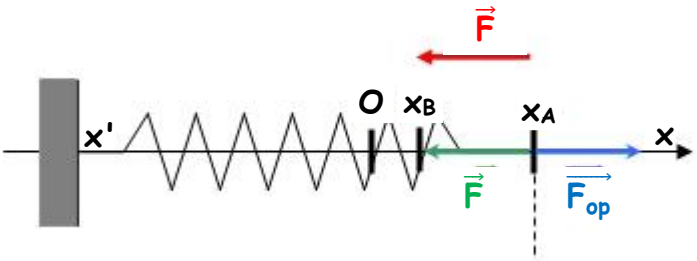
On considère un déplacement du centre d'inertie d'un solide dû à un opérateur extérieur, dont l'action est modélisée par une force $\overrightarrow{F_{op}}$.

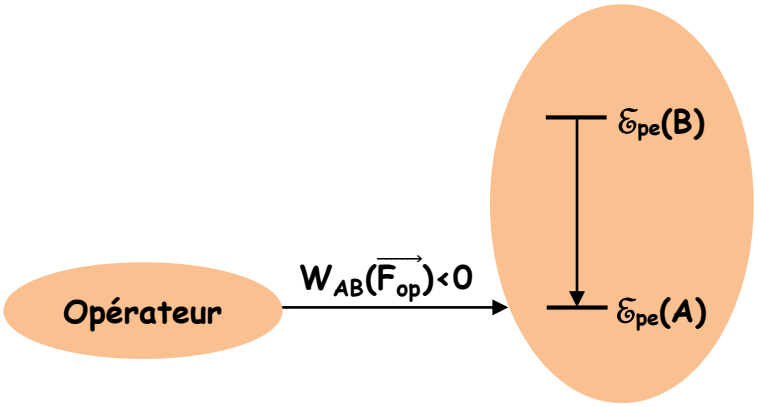
La variation d'énergie potentielle du solide liée à la force $\overrightarrow{F_{op}}$ lors de son déplacement entre deux états **A** et **B** dans lesquels le solide est immobile est égale au travail de la force $\overrightarrow{F_{op}}$ pour amener ce solide de **A** à **B**.



3-3- Energie potentielle élastique d'un ressort

L'énergie potentielle élastique d'un ressort est la part d'énergie liée à la déformation du ressort. Si on note **(x'x)** l'axe du ressort de constante de raideur; alors son origine **O** coïncide avec la position au repos de l'extrémité libre.





La variation d'énergie potentielle élastique du ressort est:

$$\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_{pe}(A) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}})$$

On sait que:

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{op}}\right) = \frac{1}{2}.k.(x_B^2 - x_A^2)$$

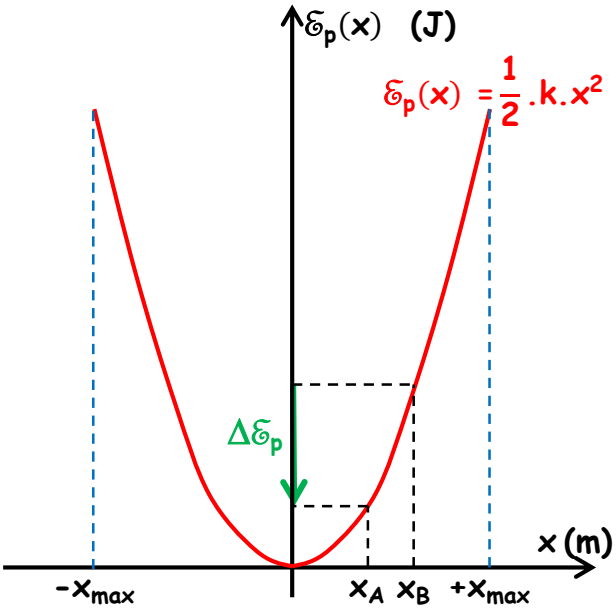
On obtient donc:

$$\Delta\mathcal{E}_{pe} = \mathcal{E}_{pe}(B) - \mathcal{E}_{pe}(A) = \frac{1}{2}.k.x_B^2 - \frac{1}{2}.k.x_A^2$$

On en déduit ainsi l'expression de l'énergie potentielle élastique du ressort de constante de raideur **k**:

$$\mathcal{E}_{pe}(x) = \frac{1}{2}.k.x + K'$$

On choisit naturellement une énergie potentielle nulle pour la position du ressort où la déformation est nulle, c'est à dire la position d'équilibre, pour laquelle on aura $\mathcal{E}_p(\mathbf{0})=\mathbf{0\ J}$, soit **K'=0**.



Lorsque l'axe **(x'x)** est parallèle à l'axe du ressort et que son origine **O** correspond à la position de repos du ressort, alors l'énergie potentielle élastique d'un ressort de constante de raideur **k** a pour expression:

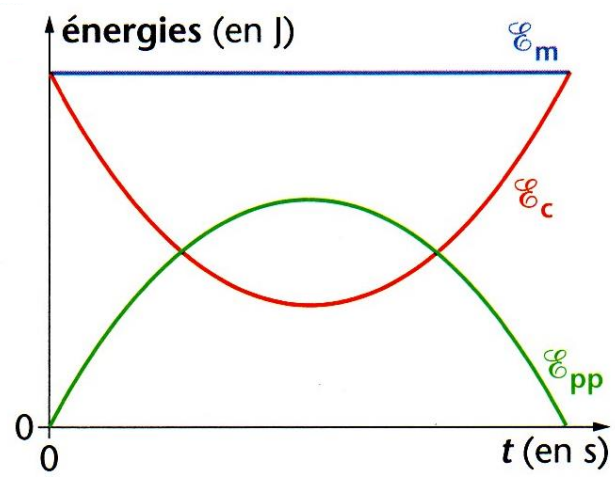
$$\mathcal{E}_{pe}(x) = \frac{1}{2}.k.x$$

4- Energie mécanique

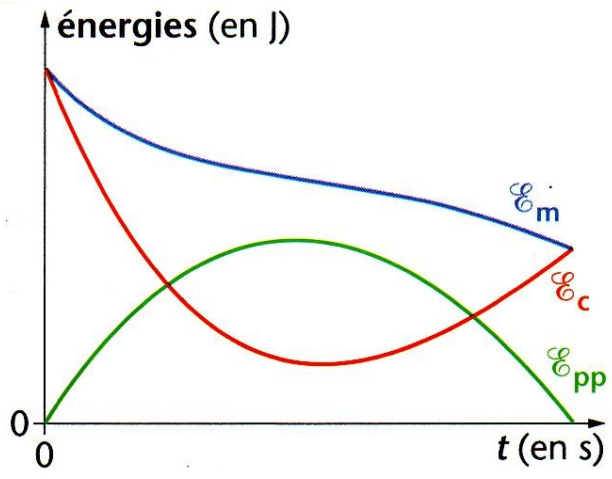
Les diverses formes d'énergie d'un système peuvent être converties les unes en les autres par travail, transfert thermique ou rayonnement.

4-1- Conversion des diverses formes d'énergie

On peut étudier l'évolution temporelle des énergies cinétique et potentielle de pesanteur d'une bille d'acier ou de ping-pong dans l'air.



Les frottements sont négligés



Les frottements sont à l'origine de la diminution de l'énergie mécanique

Les résultats obtenus en l'absence de frottements ont montré que lorsque $\mathcal{E}_c$ est maximale, $\mathcal{E}_{pp}$ est minimale et réciproquement: il y a conversion d'une forme d'énergie en l'autre, par l'intermédiaire du travail du poids.

Dans le cas du dispositif solide–ressort horizontal, on éloigne le solide de sa position de repos **O** et, à l'instant de date t_0=**0s**, on le lâche sans vitesse initiale.

Une interface d'acquisition fournit l'abscisse **x(t)** du centre d'inertie ***G*** du solide.

A partir de la courbe d'évolution **x(t)** on peut en déduire l'évolution de la vitesse $v(t)=\dot{x}(t)$ puis l'évolution de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$ et de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{pe}(t)$:

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}.m.\dot{x}(t)^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_{pe}(t) = \frac{1}{2}.k.x(t)^2$$

Les courbes obtenues montrent que lorsque $\mathcal{E}_c(t)$ est maximale, $\mathcal{E}_{pe}(t)$ est minimale et réciproquement: il y a conversion d'une forme d'énergie en l'autre, par l'intermédiaire du travail de la force de rappel du ressort.

4-2- Conservation de l'énergie mécanique

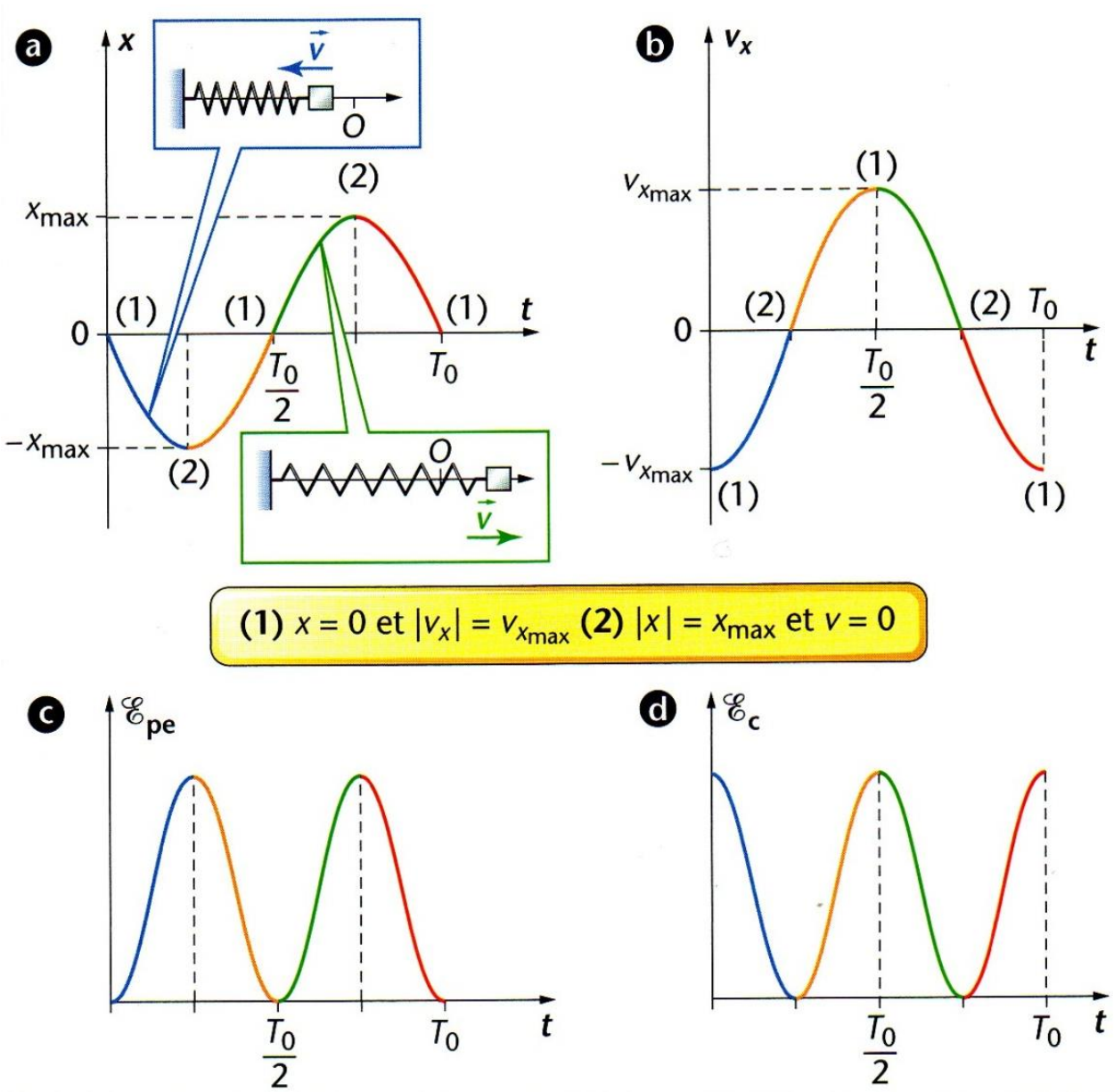
L'étude de la chute d'un projectile ou du mouvement d'un ressort a démontré que les énergies cinétique et potentielle se compensent.

Dans certaines conditions, la quantité $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ est constante au cours du mouvement, on l'appelle énergie mécanique du système et on la note $\mathcal{E}_m$.

L'énergie mécanique d'un système qui n'est soumis à aucun frottement se conserve: elle est constante au cours du temps.

L'énergie mécanique d'un système qui est soumis à des forces de frottement diminue au cours du temps. Sa diminution est égale au travail des forces de frottement:

$$\Delta\mathcal{E}_m = W(\vec{f}) < 0$$



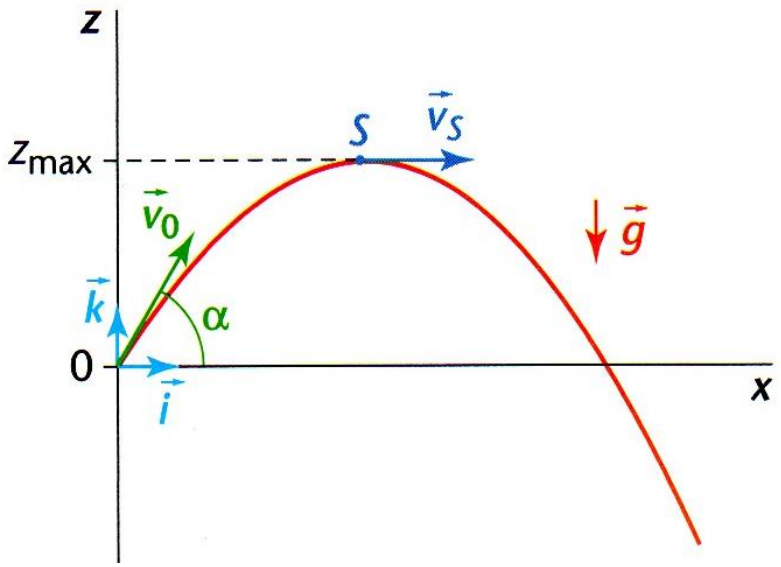
5- Exemples fondamentaux

5-1- Energie mécanique d'un projectile

L'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$ a pour expression:

$$\mathcal{E}_{pp} = m.g.z$$

On la considère nulle à l'origine de l'axe des altitudes.



Lorsque l'axe **(Oz)** est orienté vers le haut, l'énergie mécanique d'un projectile de masse **m** dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité **g** a pour expression:

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_{pp}(t) = \frac{1}{2}.m.v(t)^2 + m.g.z$$

On lance avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale, un projectile de masse **m** depuis l'altitude de référence **z=0**.

On considère que le système n'est pas soumis à des forces de frottement.

A l'instant initial on aura:

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(0) + \mathcal{E}_{pp}(0) = \frac{1}{2}.m.v(0)^2 + 0 = \frac{1}{2}.m.V_0^2$$

Au sommet **S** de la trajectoire, à l'instant t_S, on a, $v_S = V_0.\cos\alpha$ d'où:

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(t_S) + \mathcal{E}_{pp}(t_S) = \frac{1}{2}.m.V_0^2.\cos^2\alpha + m.g.z_{max}$$

L'énergie du système étant constante on aura:

$$\frac{1}{2}.m.V_0^2 = \frac{1}{2}.m.V_0^2.\cos^2\alpha + m.g.z_{max}$$

On en déduit l'altitude maximale atteinte par le projectile:

$$z_{max} = \frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2.g}$$

Si le système soumis à des forces de frottement, alors l'altitude maximale atteinte est plus faible que dans le cas précédent et l'énergie mécanique du système diminue au cours du temps, elle est dissipée par transfert thermique.

5-2- Energie mécanique du système solide–ressort

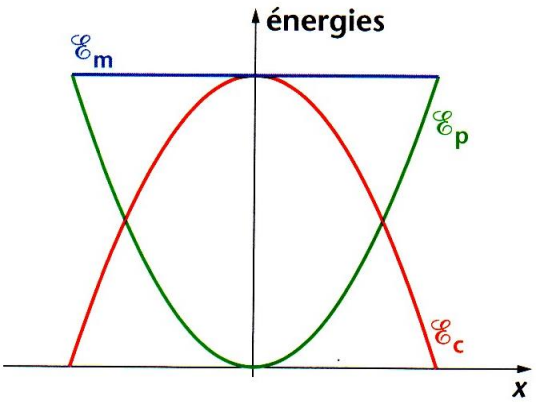
Pour un ressort d'axe horizontal, on peut toujours choisir les axes et l'origine du repère de façon à ce que l'on ait:

$$\mathcal{E}_{pp} = 0 \qquad \text{et} \qquad + \mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}.k.x^2$$

L'énergie mécanique d'un système solide–ressort constitué d'un ressort horizontal d'axe **(x'x)**, de raideur **k**, et d'un solide de masse **m** a pour expression:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2$$

Lorsque le système n'est pas soumis à des forces de frottement, alors l'amplitude des oscillations reste constante au cours du temps, le régime est périodique de période T_0.



Lorsque la masse passe par la position d'équilibre sa vitesse sera maximale, d'où:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}.m.V_{max}^2 + 0 = \frac{1}{2}.m.V_{max}^2$$

Lorsque la masse passe par la position d'élongation maximale, sa vitesse sera nulle, d'où:

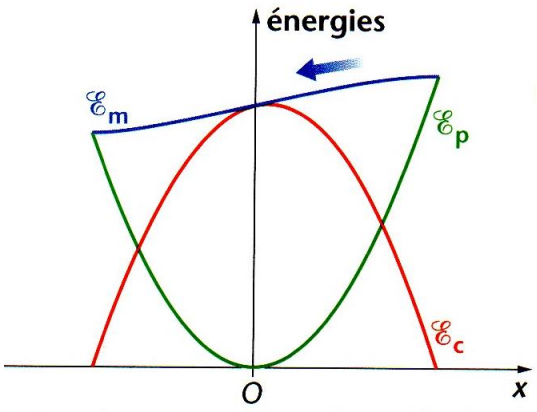
$$\mathcal{E}_m = 0 + \frac{1}{2}.k.x_{max}^2 = \frac{1}{2}.k.x_{max}^2$$

L'énergie mécanique du système étant constante; on en aura:

$$\frac{1}{2}.m.V_{max}^{2} = \frac{1}{2}.k.x_{max}^{2}$$

On en déduit la vitesse maximale atteinte par la masse:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_{max}$$

Si le système est soumis à des forces de frottement, alors l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps, le régime est pseudo-périodique de période **T** (voire apériodique si les frottements sont importants).

L'énergie mécanique du système diminue au cours du temps, elle est dissipée par transfert thermique.